На правах рукописи

Миронова Любовь Борисовна

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМИ СТАРШИМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2005

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Жегалов Валентин Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Репин Олег Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент Бурмистров Борис Николаевич
Ведущая организация:	Самарский государственный университет

Защита состоится 24 января 2006 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, Казань, ул. Университетская, 17, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан ____ декабря 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исходным моментом для темы предлагаемой диссертации послужили работы ряда авторов по исследованию системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

интересной, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к исследованию важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа.

Аналогичная система высокого порядка имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial^{k_s} v_s}{\partial x_s^{k_s}} = f_s\Big(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, \frac{\partial^{k_1 - 1} v_1}{\partial x_s^{k_1 - 1}}, \ldots, v_n, \ldots, \frac{\partial^{k_n - 1} v_n}{\partial x_s^{k_n - 1}}\Big), \tag{2}$$

$$s = 1, \ldots, n,$$

где f_s — линейные относительно аргументов $v_1, \ldots, \frac{\partial^{k_n-1}v_n}{\partial x_s^{k_n-1}}$ функции.

Путем введения новых искомых функций можно представить (2) как частный случай системы

$$u_{lx_j} = \sum_{i=1}^{m} a_{li}(x_1, \ldots, x_n)u_i + f_l(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant l \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{3}$$

если $1 \leqslant l \leqslant k_1$, то $j = 1$, если $k_1 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2$, то $j = 2$, если $k_1 + k_2 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2 + k_3$, то $j = 3, \ldots$, если $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, то $j = n$. Именно (3) и является предметом исследования в настоящей работе.

Основным инструментом служит адаптация метода Римана к рассматриваемой системе уравнений. Для гиперболического уравнения

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \tag{4}$$

а также системы (в этом случае a, b, c — известные матричные функции, f — известная, u — искомая векторные функции) этот метод хорошо известен и применяется при построении решений и исследовании широкого круга задач. В ряде работ В.И. Жегалова и его учеников этот метод был распространен на класс уравнений со старшими частными производными

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

где
$$D_1 \equiv \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},$$
а D_2 — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из D_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования. Одним из основных моментов в работах этих авторов было определение функции Римана как решения уравнения типа Вольтерра. Другие варианты метода Римана предлагались в работах Л. Бианки, О. Николетти, М.К. Фаге, А.П. Солдатова и М.Х. Шханукова, У. Ранделла, М. Стечера, В.Ф. Волкодавова, В.Н. Захарова и других.

Отметим, что некоторые частные случаи уравнения (5) при $n = 2$ исследовались с разных точек зрения В.А. Водаховой, О.М. Джохадзе, Р.С. Жамаловым, М.Х. Шхануковым, Д. Колтоном, С. Еасвараном, Д. Манжероном, М. Огюсторели, В. Радочовой и другими. Интерес к уравнению (5) объясняется его приложениями в теориях фильтрации жидкости в трещиноватых средах, поглощения влаги корнями растений, колебаний стержней с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах.

Э. Хольмгрен (Arkiv för matematik, astronomy och fysik. 1910, band 6, 2) распространил метод Римана на системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Б.Н. Бурмистровым результаты Хольмгрена развивались с целью решения задачи Коши, возникшей в связи с исследованием граничной задачи для системы уравнений смешанного типа на плоскости (Труды семинара по краевым задачам. Казанский ун-т, 1971, вып. 8.).

Вместе с тем многие авторы исследовали системы дифференциальных уравнений с частными производными, не прибегая к схеме, предложенной Э. Хольмгреном. Так, в серии работ Т.В. Чекмарева решение задачи Гурса для системы (1) с условиями
$$u_i|_{x_i=x_i^0} = \varphi_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n), \quad i=1,\ldots,n, \tag{6}$$
строится методом последовательных приближений. На полученных формулах основывается вывод формул решений задач Коши и Дарбу. Отметим также работу А.В. Бицадзе (Матем. моделирование. 1994, Т. 6, 6), в которой были предложены формулы интегрального представления решений задач Коши и Гурса для (1) при $n = 2$, позволяющие установить их структурные свойства.

Таким образом, система (3) может рассматриваться как обобщение некоторых уравнений, изучавшихся в различных аспектах целым рядом авторов.

Значительная часть диссертации посвящена исследованию различных граничных задач для системы с двукратными старшими производными

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^0(x_1,\ldots,x_n)u_i + \\ + f_k(x_1,\ldots,x_n), \quad k=\overline{1,n}. \tag{7}$$

На примере системы (7) хорошо видно, как результаты, относящиеся к системе (3), могут быть применены к системе (2) (алгоритм сведения (2) к (3) одинаков при любом порядке производных в левых частях уравнений системы (2)). В то же время для детального исследования требуется ограничиться каким-то более определенным классом систем (2). В качестве такого класса, на примере которого демонстрируются возможности метода Римана, в настоящей диссертации взяты системы с двукратными старшими производными. Представляется, что они являются моделями, на основе которых можно строить определенные предположения об изучении систем с производными любой конечной кратности. Наиболее подробно в диссертации рассмотрены системы с двукратным дифференцированием в R^2 и R^3. Это, в частности, связано с тем, что получаемые результаты легко интерпретировать геометрически.

Основной целью работы является разработка варианта метода Римана для системы (3) и применение полученных результатов к исследованию систем с кратным дифференцированием вида (2).

Методы исследования. Центральным моментом является разработка метода Римана для системы (3). Для обоснования предлагаемой схемы рассуждений и при исследовании систем вида (2) применяются методы теории интегральных уравнений, результаты теории дифференциальных уравнений и систем, используется аппарат дифференциальных форм.

Научная новизна. Новыми являются предложенный вариант метода Римана для системы (3), а также постановка большинства рассматриваемых в диссертации граничных задач. Методы исследования этих задач также содержат элементы новизны: приемы вывода интегральных уравнений для редукции исследуемых задач к уже изученным, выявление условий однозначной разрешимости задач, а также характера зависимости решения от произвольных постоянных. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Разработка нового варианта метода Римана для системы (3). Получение в терминах матрицы Римана решений задач Гурса, Коши и смешанной задачи для (3).

2. Получение в терминах матрицы Римана решений основной характеристической задачи, задачи Коши и смешанной задачи для системы (7) в пространствах R^2, R^3 и в пространстве любого конечного числа измерений.

3. Постановка различных характеристических задач для системы (7) в пространствах R^2 и R^3, исследование характера их разрешимости.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер, заполняя определенный пробел в теории систем дифференциальных уравнений с частными производными. Полученные результаты могут быть использованы при изучении новых вариантов краевых задач для систем того же вида (возможно при менее ограничительных предположениях на коэффициенты, например, если они допускают сингулярности), а также послужить отправными точками для исследования систем со старшими частными производными более высокой кратности.

Апробация работы. Результаты диссертации по мере их получения докладывались на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета. Были сделаны доклады на международной научной конференции <Актуальные проблемы математики и механики>, посвященной 200-летию Казанского государственного университета и 70-летию НИИ математики и механики имени Н.Г. Чеботарева (Казань, 2004 г.), на VII международной научной школе-конференции <Теория функций, ее приложения и смежные вопросы> (Казань, 2005 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 9 публикациях автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 140 страниц и состоит из введения, четырех глав, разбитых на 12 параграфов и списка литературы из 97 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении дается обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, и характеризуются результаты автора, изложенные в последующих главах.

Глава 1 может рассматриваться как определенное распространение рассуждений из указанных выше работ Э. Хольмгрена и Б.Н. Бурмистрова на случай системы (3). При этом используется идея из работ В.И. Жегалова и его учеников: элементы матрицы Римана вводятся как решения некоторых систем интегральных уравнений типа Вольтерра, решение каждой из этих систем существует и единственно в классе непрерывных функций. Но сначала (§ 1) доказывается существование и единственность решения рассматриваемых в данной главе задач Гурса, Коши и смешанной задачи (существенную роль здесь играет метод последовательных приближений). Основным же в этой главе является § 2, где излагается вариант метода Римана, заключающийся в следующем. Система (3) переписывается в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_m).$$

Здесь $\mathbf{A}_i$ — постоянные диагональные матрицы, $\mathbf{A}_i = \mathrm{diag}(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, причем $\alpha_s^1 = 1$ при $1 \leqslant s \leqslant k_1$, $\alpha_s^2 = 1$ при $k_1 + 1 \leqslant s \leqslant k_1 + k_2$, $\ldots$, $\alpha_s^n = 1$ при $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant s \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, остальные диагональные элементы матриц $\mathbf{A}_i$ равны нулю; $\mathbf{B} = (a_{li})$, a_{li} — коэффициенты системы (3), $l = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,m}$; $\mathbf{F} = \mathrm{colon}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Вводится матрица Римана $\mathbf{R} = \mathrm{colon}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_m)$, где $\mathbf{R}_i(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (r_{i1}, \ldots, r_{im})$, $i = \overline{1,m}$, являются решениями систем

$$r_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{ij} - \int\limits_{\xi_p}^{x_p} \Big(\sum_{q=1}^{m} a_{qj}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \times$$
$$\times r_{iq}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \Big) d\eta_p, \quad (8)$$

$$\sum_{q=1}^{p-1} k_q + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{q=1}^{p} k_q, \quad p = \overline{1,n},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, a_{qj} — коэффициенты системы (3). Решения систем () при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. Дифференцируя () получаем, что по первым n аргументам $(x_1, \dots, x_n)$ матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (3) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}\mathbf{A}_i)_{x_i} - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Доказывается тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i}, \tag{9}$$

интегрированием которого по соответствующим областям получаются формулы решения рассматриваемых задач.

Возьмем в качестве примера одну из задач. Пусть $G = \{x_i^0 < x_i < x_i^1,\ i = \overline{1, n}\}$. Обозначим через X_j грани G при $x_j = x_j^0$.

Задача Гурса. Найти регулярное в области G решение системы (3), удовлетворяющее условиям

$$u_l|_{\overline{X}_j} = \varphi_l(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad l = \overline{1, m}, \tag{10}$$

$\varphi_l \in C(\overline{X}_j)$, связь между l и j дается формулой (3).

Пусть $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in G$. Считая в тождестве (8) матрицу $\mathbf{U}$ решением системы (3), проинтегрируем (8) по области $G_1 = \{x_i^0 < x_i < \xi_i,\ i = \overline{1, n}\}$

$$\int\limits_{G_1} \mathbf{R}\mathbf{F} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int\limits_{G_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U}\right)_{x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Пусть в (3) входит производная функции u_k по переменной x_s. Применяя общую формулу Стокса и используя свойства матрицы Римана получим решение задачи Гурса в виде

$$u_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\partial^{n-1}\Phi_k(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial\xi_1 \dots \partial\xi_{s-1}\partial\xi_{s+1} \dots \partial\xi_n}$$

с известной функцией $\Phi_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Аналогично рассматриваются задача Коши и смешанная задача (в которой часть условий задается на нехарактеристической части границы, как в задаче Коши, а часть — на характеристиках).

В связи с изложенным выше возникает вопрос: как соотносятся полученные результаты с ранее изученными Т.В. Чекмаревым для системы (1) при $n = 2$ случаями? Рассмотрению этого вопроса посвящен § 3.

В § 4 рассмотрен вопрос об однозначной разрешимости некоторой системы интегральных уравнений, на которую указаний в литературе автору обнаружить не удалось. Эти результаты требуются при доказательстве утверждений в главе 3.

Следующие главы посвящены исследованию различных граничных задач для системы с двукратными старшими производными (7).

В **главе 2** рассмотрен случай $n = 2$:

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y)v_x + b_1(x,y)u + c_1(x,y)v + f_1(x,y), \\ v_{yy} = a_2(x,y)u_y + b_2(x,y)u + c_2(x,y)v + f_2(x,y). \end{cases} \tag{11}$$

При этом в замыкании рассматриваемой области D плоскости (x, y) выполняются включения a_1, $a_2 \in C^2$, b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, $f_2 \in C^1$. Решение (10) класса u, $v \in C^1(D)$, u_{xx}, $v_{yy} \in C(D)$ называем регулярным в D.

В § 5 методом интегральных уравнений доказывается существование и единственность решений следующих задач.

Основная характеристическая задача. В области $G = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ найти регулярное решение (10), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0,y) &= \varphi_1(y), \quad (u_x - a_1 v)(x_0,y) = \varphi_2(y), \\ v(x,y_0) &= \psi_1(x), \quad (v_y - a_2 u)(x,y_0) = \psi_2(x), \end{aligned}$$

$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Эта задача играет существенную роль при исследовании других, рассматриваемых далее, задач.

Задача Коши. Пусть D — треугольная область плоскости (x, y), ограниченная характеристиками $x = x_1$, $y = y_1$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, и отрезком кривой Σ: $y = \sigma(x)$, $\sigma'(x) < 0$ (Σ — кривая класса C^2). Для определенности положим $y_1 = \sigma(0)$, $\sigma(x_1) = 0$. Требуется найти регулярное в D решение (10), удовлетворяющее условиям

$$u|_\Sigma = u_0(x), \quad v|_\Sigma = v_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = u_{10}(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Sigma = v_{10}(x),$$

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к Σ, u_0, $v_0 \in C^2([0, x_1])$, u_{10}, $v_{10} \in C^1([0, x_1])$.

Смешанная задача. Пусть D_0 — область плоскости (x, y), ограниченная характеристиками $x = x_1$, $y = y_1$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, осями координат и отрезком AB кривой Σ: $y = \sigma(x)$, $\sigma'(x) < 0$, принадлежащей классу C^2. При этом кривая отсекает от характеристического прямоугольника угол с вершиной $(0, 0)$, $A = (x_2, 0)$, $B = (0, y_2)$. Обозначим $X = \{(x, y) \,|\, x = 0,\ y_2 < y < y_1\}$, $Y = \{(x, y) \,|\, x_2 < x < x_1,\ y = 0\}$.

Требуется найти регулярное в D_0 решение (10), удовлетворяющее на характеристиках $x = 0$, $y = 0$ условиям рассмотренной выше характеристической задачи, а на Σ — условиям Коши

$$u|_{\Sigma\cup\overline{X}} = u_0(y), \quad v|_{\Sigma\cup\overline{Y}} = v_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = u_{10}(y),$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Sigma} = v_{10}(x), \quad (u_x - a_1 v)|_{\overline{X}} = \varphi(y), \quad (v_y - a_2 u)|_{\overline{Y}} = \psi(x),$$

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к Σ, u_0, $\varphi \in C^1([y_2, y_1])$, v_0, $\psi \in C^1([x_2, x_1])$, $u_{10} \in C^2([y_2, y_1])$, $v_{10} \in C^2([x_2, x_1])$. Кроме того, должны выполняться условия согласования $u_x \in C(\Sigma \cup \overline{X})$, $v_y \in C(\Sigma \cup \overline{Y})$.

В § 6 в терминах матрицы Римана строятся формулы решений сформулированных выше задач.

При рассмотрении граничных условий основной характеристической задачи нетрудно заметить, что эти условия отличаются определенной несимметричностью. В том же § 6 исследуются условия разрешимости задачи 2.1 с более <симметричными> условиями (производные искомых функций входят в граничные условия равноправно).

Задача 2.1. Найти регулярное в G решение системы (10), удовлетворяющее условиям

$$u(x_0, y) = \varkappa(y), \quad v(x, y_0) = \mu(x),$$
$$a_{11}(y)u_x(x_0, y) + a_{12}(y)v_x(x_0, y) = m_1(y),$$
$$a_{21}(x)u_y(x, y_0) + a_{22}(x)v_y(x, y_0) = m_2(x).$$

Предполагается, что выполняются условия гладкости a_{11}, $a_{12} \in C^1([y_0, y_1])$, a_{21}, $a_{22} \in C^1([x_0, x_1])$, $m_1 \in C^1([y_0, y_1])$, $m_2 \in C^1([x_0, x_1])$, причем

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Исследуется задача 2.1 путем сведения к основной характеристической задаче. Оказывается, что эта задача может быть разрешима как однозначно, так и с точностью до одной или двух произвольных постоянных. Задачи со сходными линейными комбинациями в граничных условиях исследовались В.И. Жегаловым и Н.Х.Х. Зомотом для системы (1) при $n = 2$, 3 и в общем случае.

В § 7 выделяются достаточные условия однозначной разрешимости задач для характеристического прямоугольника $G = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ с граничными условиями на трех и четырех сторонах

G. При этом указанные задачи редуцируются к основной характеристической задаче. Приведем некоторые примеры.

Задача 2.2. Найти в G регулярное решение (10), удовлетворяющее условиям

$$u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad (u_x - a_1 v)(x_0, y) = \varphi_2(y),$$
$$(v_y - a_2 u)(x, y_0) = \psi_1(x), \quad v(x, y_1) = \chi(x),$$

$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\psi_1(x)$, $\chi(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Обозначим $c_{10} = c_1 - a_{1x}$, $b_{20} = b_2 - a_{2y}$.

Теорема 2.5. *Если* a_1, $a_2 \in C^2(\overline{G})$, b_1, b_{20}, c_{10}, c_2, f_1, $f_2 \in C^1(\overline{G})$, $c_2(x, y) \geqslant 0$ *в* $\overline{G}$, *то существует единственное решение задачи* 2.2.

Задача 2.4. Найти в G регулярное решение (10), удовлетворяющее условиям

$$u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad (u_x - a_1 v)(x_1, y) = \varphi_2(y),$$
$$v(x, y_0) = \psi_1(x), \quad (v_y - a_2 u)(x, y_1) = \psi_2(x),$$

$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Теорема 2.7. *Если* a_1, $a_2 \in C^2(\overline{G})$, b_1, b_{20}, c_{10}, c_2, f_1, $f_2 \in C^1(\overline{G})$ *и в* $\overline{G}$ *выполняется одно из условий*

$$a_1(x, y) = c_{10}(x, y) = c_2(x, y) \equiv 0, \quad b_1(x, y) \geqslant 0,$$

$$b_1(x, y) = a_2(x, y) = b_{20}(x, y) \equiv 0, \quad c_2(x, y) \geqslant 0,$$

то решение задачи 2.4 *существует и единственно.*

В **главе 3** основные результаты главы 2 переносятся на трехмерное пространство. Здесь изучается система

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y,z)v_x + b_1(x,y,z)w_x + c_1(x,y,z)u + \\ \qquad + d_1(x,y,z)v + e_1(x,y,z)w + f_1(x,y,z), \\ v_{yy} = a_2(x,y,z)u_y + b_2(x,y,z)w_y + c_2(x,y,z)u + \\ \qquad + d_2(x,y,z)v + e_2(x,y,z)w + f_2(x,y,z), \\ w_{zz} = a_3(x,y,z)u_z + b_3(x,y,z)v_z + c_3(x,y,z)u + \\ \qquad + d_3(x,y,z)v + e_3(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \end{cases} \tag{12}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D пространства (x, y, z) выполняются включения a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i = \overline{1, n}$. Решение (11) класса u, v, $w \in C^1(D)$, u_{xx}, v_{yy}, $w_{zz} \in C(D)$ называем регулярным в D.

Основная характеристическая задача, задача Коши и смешанная задача ставятся и исследуются в § 8 и § 9 главы 3 аналогично случаю системы (10), поэтому соответствующие результаты мы приводить не будем, ограничившись формулировкой основной характеристической задачи. Вместе с тем, рассуждения усложняются и выкладки становятся более громоздкими в связи с увеличением размерности пространства независимых переменных. Поэтому для детального выяснения методики применения метода Римана для исследования систем с кратным дифференцированием результаты данной главы необходимы.

Основная характеристическая задача. Пусть $G = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$. Обозначим через X, Y, Z грани G при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно. Требуется найти регулярное в области G решение системы (11), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u(x_0,y,z) = \varphi_1(y,z), \quad v(x,y_0,z) = \varphi_2(x,z), \\ w(x,y,z_0) = \varphi_3(x,y), \\ (u_x - a_1 v - b_1 w)(x_0,y,z) = \psi_1(y,z), \\ (v_y - a_2 u - b_2 w)(x,y_0,z) = \psi_2(x,z), \\ (w_z - a_3 u - b_3 v)(x,y,z_0) = \psi_3(x,y), \end{gathered} \tag{13}$$

$\varphi_1,\ \psi_1 \in C^1(\overline{X})$, $\varphi_2,\ \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$, $\varphi_3,\ \psi_3 \in C^1(\overline{Z})$.

В § 10 выделяются достаточные условия однозначной разрешимости задач для характеристического параллелепипеда $G = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ с граничными условиями на четырех, пяти и шести сторонах G. Указанные задачи, как и в § 7, исследуются путем редукции к основной характеристической задаче (решение которой существует и единственно). Ограничимся тремя примерами.

Обозначим через X_1, Y_1, Z_1 грани G при $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ соответственно.

Задача 3.1. Найти в G регулярное решение (11), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0,y,z) &= \varphi_1(y,z), \quad (u_x - a_1 v - b_1 w)(x_1,y,z) = \chi_1(y,z), \\ v(x,y_0,z) &= \varphi_2(x,z), \quad (v_y - a_2 u - b_2 w)(x,y_0,z) = \psi_2(x,z), \\ w(x,y,z_0) &= \varphi_3(x,y), \quad (w_z - a_3 u - b_3 v)(x,y,z_0) = \psi_3(x,y), \end{aligned} \tag{14}$$

$\varphi_1(y,z) \in C^1(\overline{X})$, $\chi_1(y,z) \in C^1(\overline{X}_1)$, $\varphi_2(x,z)$, $\psi_2(x,z) \in C^1(\overline{Y})$, $\varphi_3(x,y)$, $\psi_3(x,y) \in C^1(\overline{Z})$.

Обозначим $d_{10} = d_1 - a_{1x}$, $e_{10} = e_1 - b_{1x}$, $c_{20} = c_2 - a_{2y}$, $e_{20} = e_2 - b_{2y}$, $c_{30} = c_3 - a_{3z}$, $d_{30} = d_3 - b_{3z}$.

Теорема 3.4. *Если* a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, $b_3 \in C^2(\overline{G})$, c_1, c_{20}, c_{30}, d_{10}, d_2, d_{30}, e_{10}, e_{20}, e_3, f_1, f_2, $f_3 \in C^1(\overline{G})$, $c_1(x,y,z) \geqslant 0$ *в* $\overline{G}$, *то существует единственное решение задачи* 3.1.

Задача 3.3. Найти в G регулярное решение (11), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y, z) &= \varphi_1(y, z), \quad (u_x - a_1 v - b_1 w)(x_1, y, z) = \chi_1(y, z), \\ v(x, y_0, z) &= \varphi_2(x, z), \quad (v_y - a_2 u - b_2 w)(x, y_1, z) = \chi_2(x, z), \\ w(x, y, z_0) &= \varphi_3(x, y), \quad (w_z - a_3 u - b_3 v)(x, y, z_0) = \psi_3(x, y), \end{aligned} \tag{15}$$

$\varphi_1(y,z) \in C^1(\overline{X})$, $\chi_1(y,z) \in C^1(\overline{X}_1)$, $\varphi_2(x,z) \in C^1(\overline{Y})$, $\chi_2(x,z) \in C^1(\overline{Y}_1)$, $\varphi_3(x,y)$, $\psi_3(x,y) \in C^1(\overline{Z})$.

При выполнении одного из условий

$$a_1(x,y,z) = d_{10}(x,y,z) = d_2(x,y,z) \equiv 0, \quad c_1 \geqslant 0, \tag{16}$$

$$c_1(x,y,z) = a_2(x,y,z) = c_{20}(x,y,z) \equiv 0, \quad d_2 \geqslant 0, \tag{17}$$

задача 3.3 редуцируется к основной характеристической задаче. Поэтому справедлива

Теорема 3.6. *Если* a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, $b_3 \in C^2(\overline{G})$, c_1, c_{20}, c_{30}, d_{10}, d_2, d_{30}, e_{10}, e_{20}, e_3, f_1, f_2, $f_3 \in C^1(\overline{G})$, *и выполняется одно из условий* (15), (16), *то существует единственное решение задачи* 3.3.

Задача 3.6. Найти в G регулярное решение (11), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y, z) &= \varphi_1(y, z), \quad (u_x - a_1 v - b_1 w)(x_1, y, z) = \chi_1(y, z), \\ v(x, y_0, z) &= \varphi_2(x, z), \quad (v_y - a_2 u - b_2 w)(x, y_1, z) = \chi_2(x, z), \\ w(x, y, z_0) &= \varphi_3(x, y), \quad (w_z - a_3 u - b_3 v)(x, y, z_1) = \chi_3(x, y), \end{aligned}$$

$\varphi_1(y,z) \in C^1(\overline{X})$, $\chi_1(y,z) \in C^1(\overline{X}_1)$, $\varphi_2(x,z) \in C^1(\overline{Y})$, $\chi_2(x,z) \in C^1(\overline{Y}_1)$, $\varphi_3(x,y) \in C^1(\overline{Z})$, $\chi_3(x,y) \in C^1(\overline{Z}_1)$.

Задача 3.6 редуцируется к основной характеристической задаче при выполнении любой из следующих групп условий:

$$\begin{gathered} a_1(x,y,z) = d_{10}(x,y,z) = d_2(x,y,z) = b_1(x,y,z) = \\ = e_{10}(x,y,z) = e_3(x,y,z) = b_2(x,y,z) = e_{20}(x,y,z) \equiv 0, \\ c_1 \geqslant 0; \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} a_1(x,y,z) = d_{10}(x,y,z) = d_2(x,y,z) = b_1(x,y,z) = \\ = e_{10}(x,y,z) = e_3(x,y,z) = b_3(x,y,z) = d_{30}(x,y,z) \equiv 0, \\ c_1 \geqslant 0; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} c_1(x,y,z) = a_2(x,y,z) = c_{20}(x,y,z) = b_2(x,y,z) = \\ = e_{20}(x,y,z) = e_3(x,y,z) = b_1(x,y,z) = e_{10}(x,y,z) \equiv 0, \\ d_2 \geqslant 0; \end{gathered} \tag{20}$$

$$
\begin{gathered}
c_1(x,y,z) = a_2(x,y,z) = c_{20}(x,y,z) = b_2(x,y,z) = \\
= e_{20}(x,y,z) = e_3(x,y,z) = a_3(x,y,z) = c_{30}(x,y,z) \equiv 0, \\
d_2 \geqslant 0;
\end{gathered} \tag{21}
$$

$$
\begin{gathered}
c_1(x,y,z) = a_3(x,y,z) = c_{30}(x,y,z) = d_2(x,y,z) = \\
= b_3(x,y,z) = d_{30}(x,y,z) = a_1(x,y,z) = d_{10}(x,y,z) \equiv 0, \\
e_3 \geqslant 0;
\end{gathered} \tag{22}
$$

$$
\begin{gathered}
c_1(x,y,z) = a_3(x,y,z) = c_{30}(x,y,z) = d_2(x,y,z) = \\
= b_3(x,y,z) = d_{30}(x,y,z) = a_2(x,y,z) = c_{20}(x,y,z) \equiv 0, \\
e_3 \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Теорема 3.9. *Если* a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, $b_3 \in C^2(\overline{G})$, c_1, c_{20}, c_{30}, d_{10}, d_2, d_{30}, e_{10}, e_{20}, e_3, f_1, f_2, $f_3 \in C^1(\overline{G})$, *и выполняется одно из условий* (17) – (22), *то существует единственное решение задачи* 3.6.

В оставшихся двух параграфах **главы 4** рассмотрены основная характеристическая задача, задача Коши и смешанная задача для системы (7) в пространстве любого конечного числа измерений.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Жегалову Валентину Ивановичу за всестороннюю помощь и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Миронова Л.Б. Постановка задачи Коши для линейной системы уравнений с двукратными частными производными // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды XIII межвуз. конф. Ч. 3. — Самара, 2003. — С. 131–133.

2. Миронова Л.Б. Метод Римана для одной системы уравнений с двукратными частными производными // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды всеросс. конф. Ч. 3. — Самара, 2004. — С. 158–161.

3. Миронова Л.Б. О методе Римана для одной системы в трехмерном пространстве // Труды XIV междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. — Ростов-на-Дону, 2004. — С. 264–266.

4. Миронова Л.Б. К задаче Коши для одной системы с кратными характеристиками // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 25. Актуальные проблемы математики и механики: Материалы междунар. научн. конф. — Казань, 2004. — С. 186–187.

5. Миронова Л.Б. Метод Римана для системы с двукратными старшими частными производными в n-мерном пространстве // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы VI междунар. научн. конф. — Смоленск, 2005. — С. 136–137.

6. Миронова Л.Б. О характеристических задачах для одной системы уравнений с частными производными // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды II всеросс. конф. Ч. 3. — Самара, 2005. — С. 178–180.

7. Миронова Л.Б. Об одной задаче для системы с двукратными старшими частными производными // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 30. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы VII междунар. научн. школы-конф. — Казань, 2005. — С. 109–110.

8. Миронова Л.Б. О характеристических задачах для одной системы с кратными характеристиками в трехмерном пространстве / Елабужский гос. пед. ун-т. — Елабуга, 2005. — 21 с. — Деп. в ВИНИТИ 20.07.05, 1059–В2005.

9. Миронова Л.Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. (В печати.)

Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100. Заказ 444.

Издательство Елабужского государственного педагогического университета
423600, г. Елабуга, ул. Казанская, 89
Отпечатано на полиграфическом участке издательства
Лицензия 0317 от 20.10.2000